

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2018-2019

Prova scritta in aula del 04.06.2019

Parte II - Testo 1

CdS Edilizia ☐

CdS AdC ☐

CdS SdA ☐

*Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti.*

Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

**Esercizio n. 1** (17 punti)

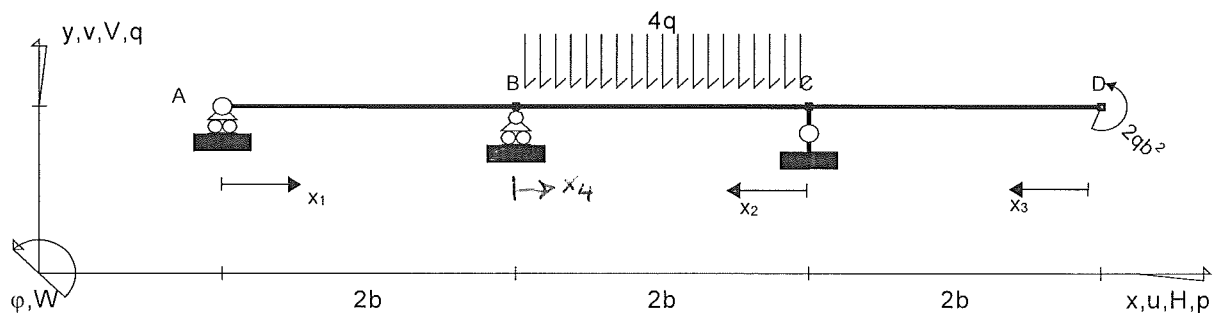
Risolvere mediante il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) la struttura iperstatica riportata in Figura, assumendo, come incognita iperstatica, il momento flettente sull'appoggio di continuità  $B$ ,  $M_B$ . Dopo avere determinato l'iperstatica *tenendo conto solo della deformabilità flessionale*, calcolare le reazioni vincolari, le azioni interne e tracciare nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici.

Calcolare infine, riapplicando il PLV, lo spostamento verticale del punto  $D$ ,  $v_D$ .

*Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.*

Universita'diCagliari

SdC\_SdA04.06.19\*001



## Esercizio n. 2 (7 punti)

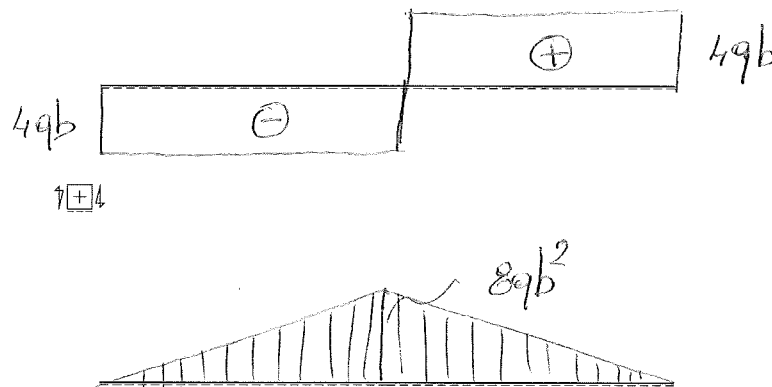
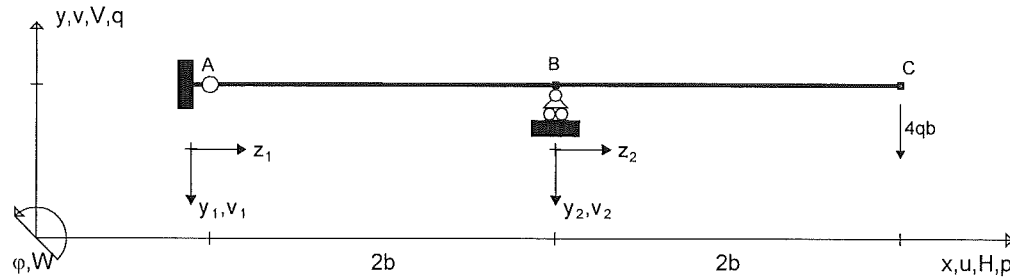
Per la struttura *isostatica*, indicata in Figura, determinare le reazioni vincolari e l'espressione delle azioni interne, nonché le condizioni al contorno imposte dai vincoli nei punti  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

Utilizzare quindi l'equazione della linea elastica per determinare:

1. La deformata della linea d'asse,  $v(z) = v_1(z_1) \cup v_2(z_2)$ ;
2. La sua derivata prima,  $v'(z) = v_1'(z_1) \cup v_2'(z_2)$ ;
3. Lo spostamento verticale del punto  $C$ ,  $v_C$ ;
4. La rotazione del punto  $A$ ,  $\theta_A$ .

Universita' di Cagliari

SdC\_SdA 04.06.19\*001



(+)

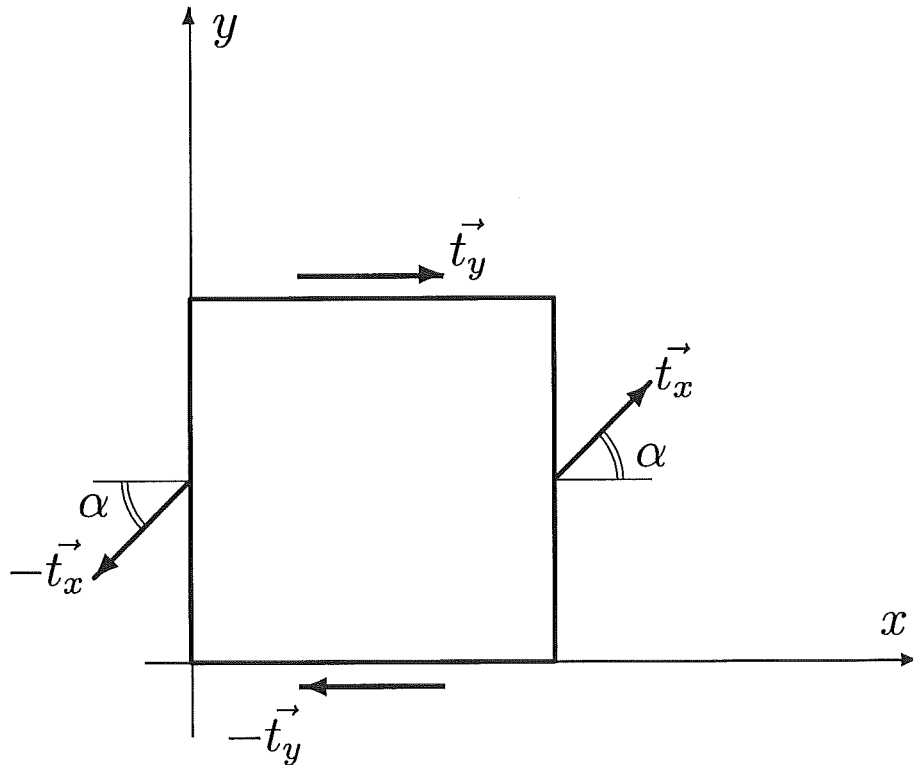
$$\begin{aligned}
 H_A (\Rightarrow) &= 0; & V_A (\uparrow) &= -4qb; & V_B (\uparrow) &= 4qb; \\
 N_{AB} &= 0; & T_{AB} &= -4qb; & M_{AB} &= -4qbz_1; \\
 N_{BC} &= 0; & T_{BC} &= 4qb; & M_{BC} &= -8qb^2 + 4qbz_2; \\
 \text{c.c in A} &= v_1(z_1=0) = 0; & \text{c.c in B} &= \int v_1'(z_1=2b) = v_2'(z_2=0) = 0; \\
 & & & v_1(z_1=2b) = v_2(z_2=0) = 0; \\
 \text{c.c in C} &= //; \\
 v_1(z_1) &= -\frac{8}{3} \frac{qb^3}{EI} + \frac{2}{3} \frac{qbz_1^3}{EI}; & v_1'(z_1) &= -\frac{8}{3} \frac{qb^3}{EI} + 2 \frac{qbz_1^2}{EI}; \\
 v_2(z_2) &= \frac{16}{3} \frac{qb^3}{EI} + 4 \frac{qb^2z_2^2}{EI} - \frac{2}{3} \frac{qbz_2^3}{EI}; & v_2'(z_2) &= \frac{16}{3} \frac{qb^3}{EI} + 8 \frac{qb^2z_2}{EI} - 2 \frac{qbz_2^2}{EI}; \\
 v_C &= +\frac{64}{3} \frac{qb^4}{EI} (\downarrow); & \theta_A &= -\frac{8}{3} \frac{qb^3}{EI} (\angle \searrow);
 \end{aligned}$$

### Esercizio n. 3 (9 punti)

Un elemento di materiale *in condizioni di equilibrio* è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi  $x$  e  $y$  ai vettori sforzo (piani)  $\vec{t}_x$  e  $\vec{t}_y$  rispettivamente; di questi  $\vec{t}_x$  è inclinato rispetto all'asse  $x$  di un angolo  $\alpha = -90^\circ$  (sicché  $\cos \alpha = 0$ ;  $\sin \alpha = -1$ ) e ha modulo di valore  $|\vec{t}_x| = 105$  MPa. L'altro vettore sforzo,  $\vec{t}_y$ , è invece *orizzontale*, come indicato in Figura.

Si chiede di determinare le componenti  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$  del tensore degli sforzi, costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali,  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , e la massima tensione tangenziale,  $\tau_{\max}$ .

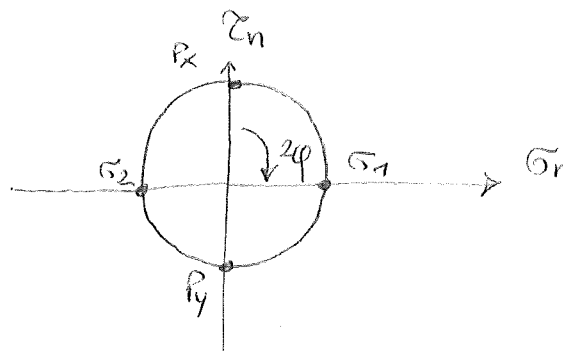
Determinare inoltre quanto vale l'angolo  $\varphi$  formato dall'asse  $x$  e dall'asse normale alla faccia sulla quale agisce lo sforzo principale massimo,  $\sigma_1$ .



$$\sigma_x = \dots\dots\dots 0,0000\dots \text{ (MPa)}; \sigma_y = \dots\dots\dots 0,0000\dots \text{ (MPa)}; \tau_{xy} = \dots\dots\dots -105,0000\dots \text{ (MPa)};$$

$$\sigma_1 = \dots\dots\dots +105,0000\dots \text{ (MPa)}; \sigma_2 = \dots\dots\dots -105,0000\dots \text{ (MPa)}; \tau_{\max} = \dots\dots\dots 105,0000\dots \text{ (MPa)};$$

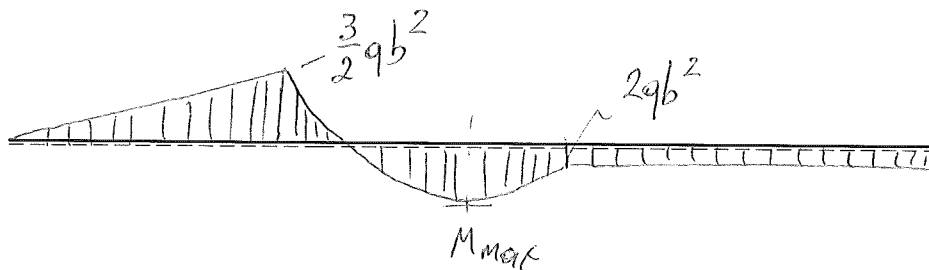
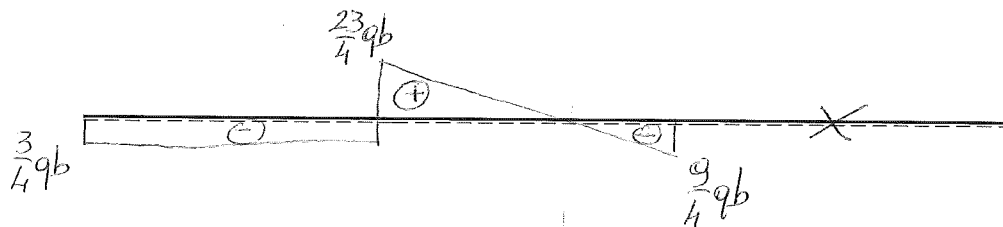
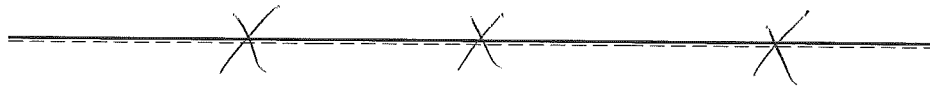
cerchio di Mohr:



$$P_x = (0,000, +105,000)$$

$$P_y = (0,000, -105,000)$$

$$\varphi = \dots\dots\dots -45,0000\dots (^\circ);$$



$$\begin{aligned}
 V_A (\uparrow) &= -3/4 qb; & V_B (\uparrow) &= 13/4 qb; & H_C (\rightarrow) &= 0; & V_C (\uparrow) &= 9/4 qb; & M_B (\curvearrowright) &= -3/2 qb^2 \\
 N_{AB} &= 0; & T_{AB} &= -3/4 qb; & M_{AB} &= -3/4 qb x_1; \\
 N_{CB} &= 0; & T_{CB} &= \begin{cases} -9/4 qb + 4qx_2 \\ 23/4 qb - 4qx_4 \end{cases}; & M_{CB} &= \begin{cases} 2qb^2 + 9/4 qb x_2 - 2qx_2^2 \\ -3/2 qb^2 + 23/4 qb x_4 - 2qx_4^2 \end{cases}; \\
 N_{DC} &= 0; & T_{DC} &= 0; & M_{DC} &= 2qb^2; \\
 v_D &= \frac{25}{3} \frac{qb^4}{EI} (\uparrow)
 \end{aligned}$$

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2018-2019

Prova scritta in aula del 04.06.2019

Parte II - Testo 2

CdS Edilizia ☐

CdS AdC ☐

CdS SdA ☐

*Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti.*

Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

**Esercizio n. 1** (17 punti)

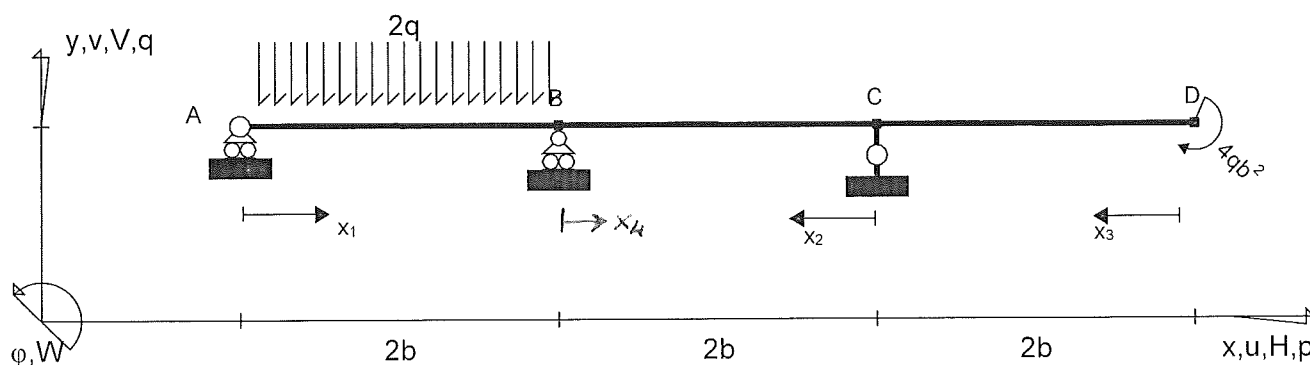
Risolvere mediante il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) la struttura iperstatica riportata in Figura, assumendo, come incognita iperstatica, il momento flettente sull'appoggio di continuità  $B$ ,  $M_B$ . Dopo avere determinato l'iperstatica *tenendo conto solo della deformabilità flessionale*, calcolare le reazioni vincolari, le azioni interne e tracciare nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici.

Calcolare infine, riapplicando il PLV, lo spostamento verticale del punto  $D$ ,  $v_D$ .

*Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.*

Università di Cagliari

SdC\_SdA04.06.19\*002



## Esercizio n. 2 (7 punti)

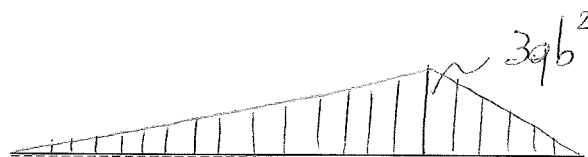
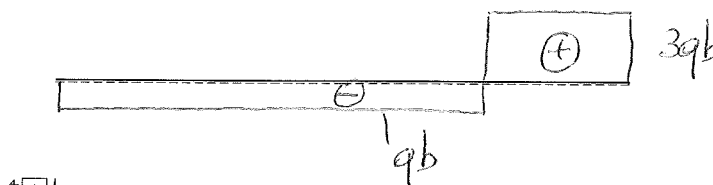
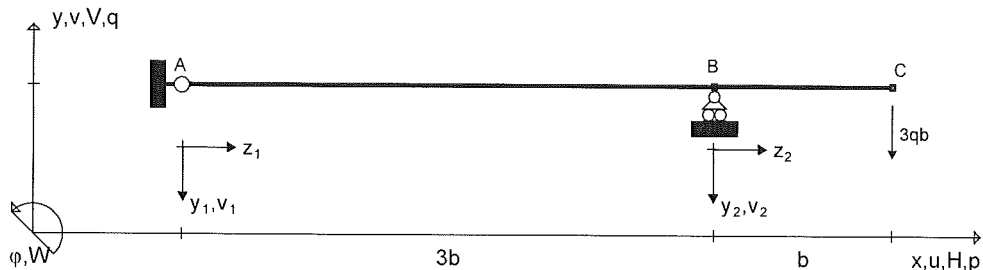
Per la struttura *isostatica*, indicata in Figura, determinare le reazioni vincolari e l'espressione delle azioni interne, nonché le condizioni al contorno imposte dai vincoli nei punti  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

Utilizzare quindi l'equazione della linea elastica per determinare:

1. La deformata della linea d'asse,  $v(z) = v_1(z_1) \cup v_2(z_2)$ ;
2. La sua derivata prima,  $v'(z) = v_1'(z_1) \cup v_2'(z_2)$ ;
3. Lo spostamento verticale del punto  $C$ ,  $v_C$ ;
4. La rotazione del punto  $A$ ,  $\theta_A$ .

Universita' di Cagliari

SdC\_SdA 04.06.19\*002



ⓈⓈⓈ

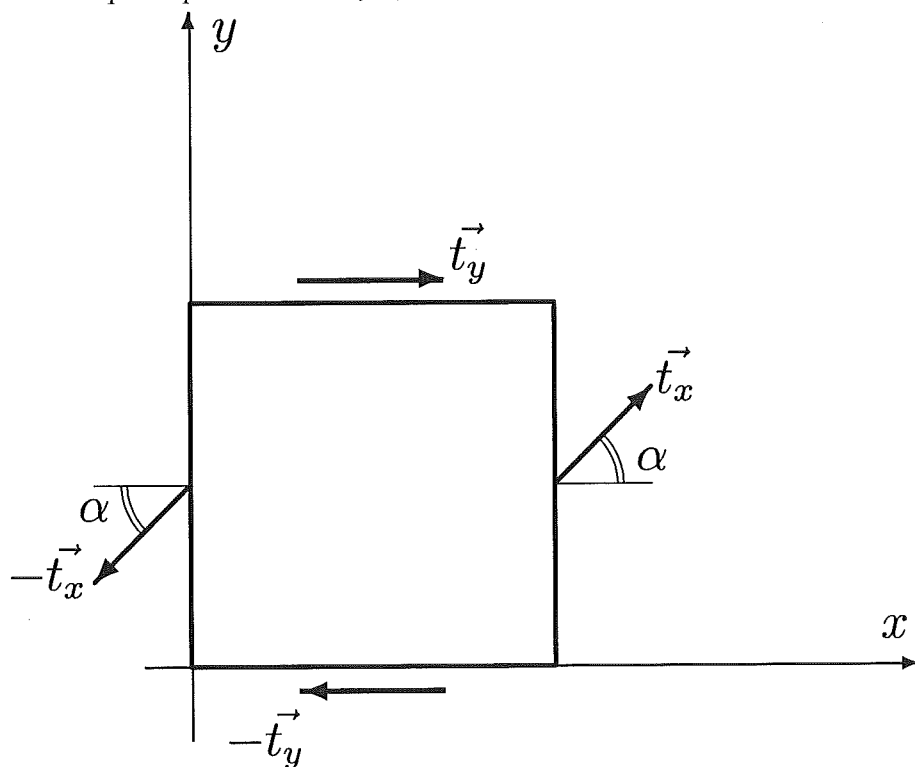
$$\begin{aligned}
 H_A (\Rightarrow) &= \dots\dots\dots 0 \dots\dots\dots; & V_A (\uparrow) &= \dots\dots\dots -qb \dots\dots\dots; & V_B (\uparrow) &= \dots\dots\dots 4qb \dots\dots\dots; \\
 N_{AB} &= \dots\dots\dots 0 \dots\dots\dots; & T_{AB} &= \dots\dots\dots -qb \dots\dots\dots; & M_{AB} &= \dots\dots\dots -qbz_1 \dots\dots\dots; \\
 N_{BC} &= \dots\dots\dots 0 \dots\dots\dots; & T_{BC} &= \dots\dots\dots 3qb \dots\dots\dots; & M_{BC} &= \dots\dots\dots -3qb^2 + 3qbz_2 \dots\dots\dots; \\
 \text{c.c in A} &= \dots\dots\dots \left. \sqrt{1} / z_1' = 0 \right) = 0 \dots\dots\dots; & \text{c.c in B} &= \dots\dots\dots \left. \begin{aligned} &\sqrt{1} / z_1 = 3b \right) = \sqrt{2} / z_2 = 0 \right) = 0 \\ &\sqrt{1} / z_1 = 3b \right) = \sqrt{2} / z_2 = 0 \right) \dots\dots\dots; \\
 \text{c.c in C} &= \dots\dots\dots \dots\dots\dots; \\
 v_1(z_1) &= \dots\dots\dots -\frac{3}{2} \frac{qb^3 z_1}{EI} + \frac{1}{6} \frac{qbz_1^3}{EI} \dots\dots\dots; & v_1'(z_1) &= \dots\dots\dots -\frac{3}{2} \frac{qb^3}{EI} + \frac{1}{2} \frac{qbz_1^2}{EI} \dots\dots\dots; \\
 v_2(z_2) &= \dots\dots\dots \frac{3}{EI} \frac{qb^3 z_2}{EI} + \frac{3}{2} \frac{qb^2 z_2^2}{EI} - \frac{1}{2} \frac{qbz_2^3}{EI} \dots\dots\dots; & v_2'(z_2) &= \dots\dots\dots \frac{3}{EI} \frac{qb^3}{EI} + \frac{3}{EI} \frac{qb^2 z_2}{EI} - \frac{3}{2} \frac{qbz_2^2}{EI} \dots\dots\dots; \\
 v_C &= \dots\dots\dots +4 \frac{qb^4}{EI} (\downarrow) \dots\dots\dots; & \theta_A &= \dots\dots\dots -\frac{3}{2} \frac{qb^3}{EI} (\angle) \dots\dots\dots;
 \end{aligned}$$

### Esercizio n. 3 (9 punti)

Un elemento di materiale *in condizioni di equilibrio* è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi  $x$  e  $y$  ai vettori sforzo (piani)  $\vec{t}_x$  e  $\vec{t}_y$ , rispettivamente; di questi  $\vec{t}_x$  è inclinato rispetto all'asse  $x$  di un angolo  $\alpha = +90^\circ$  (sicché  $\cos \alpha = 0$ ;  $\sin \alpha = +1$ ) e ha modulo di valore  $|\vec{t}_x| = 135$  MPa. L'altro vettore sforzo,  $\vec{t}_y$ , è invece *orizzontale*, come indicato in Figura.

Si chiede di determinare le componenti  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$  del tensore degli sforzi, costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali,  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , e la massima tensione tangenziale,  $\tau_{\max}$ .

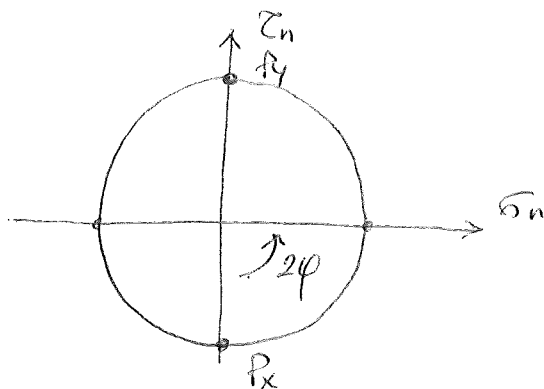
Determinare inoltre quanto vale l'angolo  $\varphi$  formato dall'asse  $x$  e dall'asse normale alla faccia sulla quale agisce lo sforzo principale massimo,  $\sigma_1$ .



$$\sigma_x = 0.0000 \text{ (MPa)}; \sigma_y = 0.0000 \text{ (MPa)}; \tau_{xy} = +135.0000 \text{ (MPa)};$$

$$\sigma_1 = +135.0000 \text{ (MPa)}; \sigma_2 = -135.0000 \text{ (MPa)}; \tau_{\max} = 135.0000 \text{ (MPa)};$$

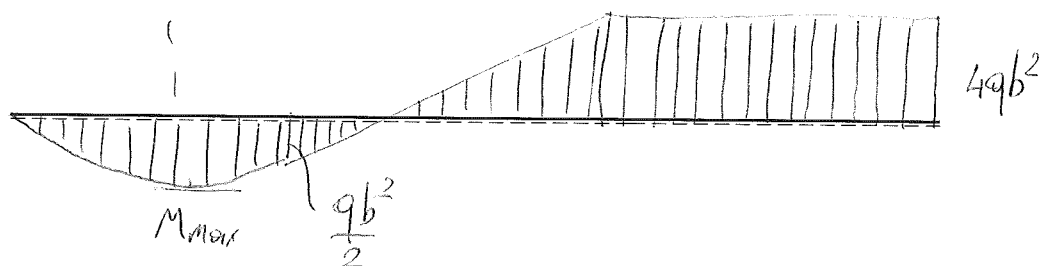
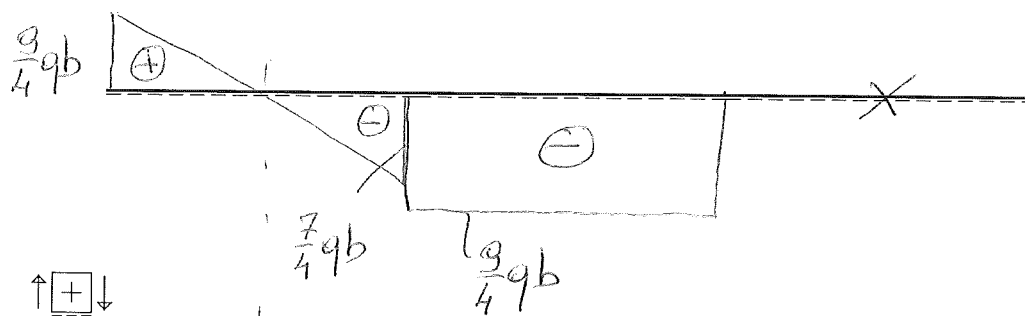
cerchio di Mohr:



$$P_x = (0.000; -135.000)$$

$$P_y = (0.000; +135.000)$$

$$\varphi = +45.0000 \text{ (}^\circ\text{)};$$



|                                  |                                   |  |                                  |   |
|----------------------------------|-----------------------------------|--|----------------------------------|---|
| $V_A (\uparrow) = \frac{3}{4}qb$ | $V_B (\uparrow) = -\frac{1}{2}qb$ | $H_C (\Rightarrow) = 0$                            | $V_C (\uparrow) = \frac{3}{4}qb$ | $M_B (\circlearrowleft) = -\frac{1}{2}qb^2$ |
| $N_{AB} = 0$                     | $T_{AB} = \frac{3}{4}qb - 2qx$    | $M_{AB} = \frac{3}{4}qbx_1 - qx_1^2$               |                                  |   |
| $N_{CB} = 0$                     | $T_{CB} = -\frac{3}{4}qb$         | $M_{CB} = \int -4qb^2 + \frac{3}{4}qbx_2$          |                                  |   |
| $N_{DC} = 0$                     | $T_{DC} = 0$                      | $M_{DC} = \int \frac{1}{2}qb^2 - \frac{3}{4}qbx_4$ |                                  |   |
| $v_D = -\frac{13qb^4}{24\eta}$   |                                   |  |                                  |   |